

信号与系统

第6章 离散时间信号与系统的 z 域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第6章 离散时间信号与系统的 z 域分析

6.1 z 变换

6.2 z 变换的性质

6.3 逆 z 变换

6.4 离散时间系统的 z 域分析

6.5 系统函数与系统特性

6.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

6.1 z 变换

序列 z 变换的定义

z 变换的收敛域

常见序列的 z 变换

■ 序列 z 变换的定义

从拉普拉斯变换到 z 变换

z 变换的定义可以借助抽样信号的拉普拉斯变换引出

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

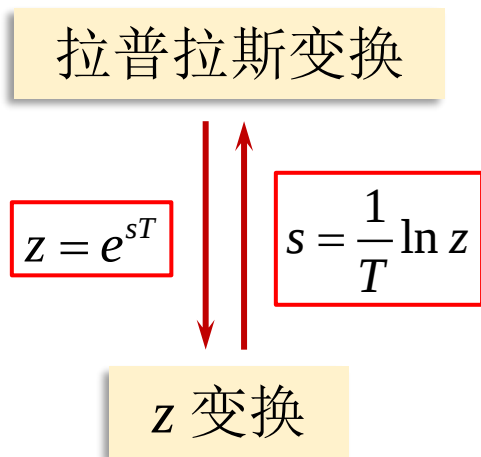
对上式作双边拉普拉斯变换，根据 $\delta(t-kT) \leftrightarrow e^{-kTs}$ ，有：

$$F(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

令 $z = e^{sT}$ ，上式变为复变量 z 的函数：

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

为了分析方便，令 T 为 1： $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$



■ 序列 z 变换的定义

z 变换的定义

z 变换对 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

➤ 双边 z 变换

➤ 单边 z 变换

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

拉普拉斯变换中着重讨论单边的因果情形；分析离散系统，对单、双边 z 变换都进行讨论。因果信号的单、双边 z 变换相等。

z 变换存在的充要条件

➤ 绝对可和条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

序列的 z 变换是关于复变量 z 的幂级数，满足绝对可和条件时，此幂级数收敛。

■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

有限长序列

收敛域至少是 $0 < |z| < \infty$ ，可能会包括 $z = 0, z = \infty$

示例

● $f(k) = \delta(k) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$

z 变换是与 z 无关的常数 1，因而在 z 的全平面收敛，即 $|z| \geq 0$ 。

● $f(k) = \delta(k - k_0) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k - k_0)z^{-k} = z^{-k_0} \quad \begin{cases} k_0 > 0 & \text{收敛域: } |z| > 0 \\ k_0 < 0 & \text{收敛域: } |z| < \infty \end{cases}$

● $f(k) = \left\{ 1, 2, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{3}, 2, 1 \right\} \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k} = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| = \underbrace{|z^2| + |2z| + 3}_{|z| < \infty} + \underbrace{|2z^{-1}| + |z^{-2}|}_{|z| > 0} < \infty \quad \text{收敛域: } 0 < |z| < \infty$$

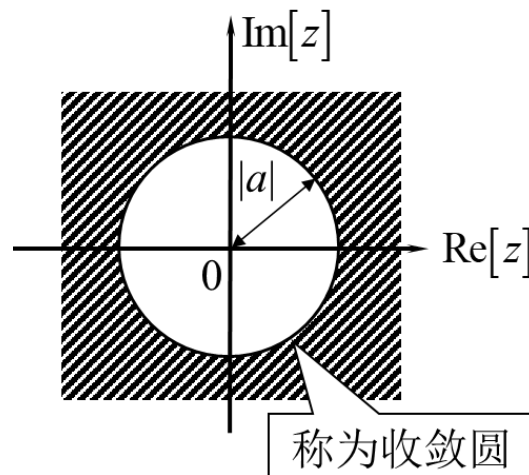
■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

因果序列

$$|z| > |a|$$

z 平面上为半径为 $|a|$ 的圆外区域



示例 $f(k) = a^k \varepsilon(k)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

收敛条件： $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, \text{收敛域: } |z| > |a|$$

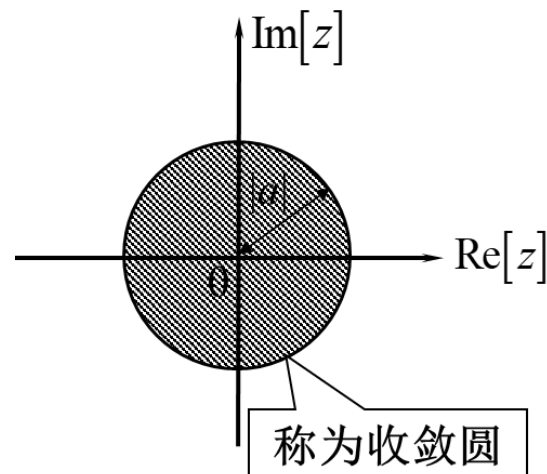
■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

反因果序列

$$|z| < |a|$$

z 平面上为半径为 $|a|$ 的圆内区域



示例 $f(k) = -a^k \varepsilon(-k-1)$

$$F(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} z^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

收敛条件： $|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$

$$-a^k \varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| < |a|$$

■ z 变换的收敛域

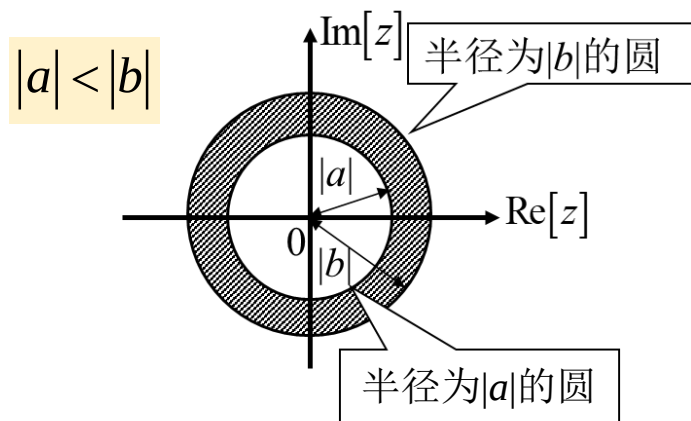
➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| > |a|$$

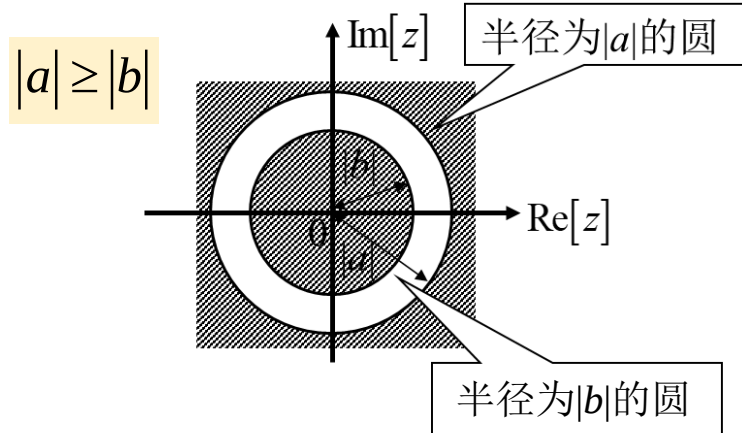
$$-a^k \varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| < |a|$$

不同信号可能会有相同的象函数，但收敛域不同。

双边序列 $f(k) = \underbrace{b^k \varepsilon(-k-1)}_{|z| < |b|} + \underbrace{a^k \varepsilon(k)}_{|z| > |a|}$ $F(z) = -\frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a}$



收敛域为圆环， z 变换存在



无公共收敛区域， z 变换不存在

■ 常用序列的 z 变换

$$\delta(k) \leftrightarrow 1 \quad |z| \geq 0 \text{ (全平面收敛)} \quad \delta(k - k_0) \leftrightarrow z^{-k_0} \begin{cases} k_0 > 0 & \text{收敛域: } |z| > 0 \\ k_0 < 0 & \text{收敛域: } |z| < \infty \end{cases}$$

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1$$

$$b^k \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - b}, |z| < |b| \quad \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - 1} \quad |z| < 1$$

$$e^{\pm j\beta k} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{\pm j\beta}}, |z| > |e^{\pm j\beta}| = 1$$

$$\cos \omega_0 k \varepsilon(k) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 k} + e^{-j\omega_0 k}] \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

$$\sin \omega_0 k \varepsilon(k) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 k} - e^{-j\omega_0 k}] \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

6.2 z 变换的性质

线性性质

z 域微分性质

移位性质

z 域积分性质

尺度变换性质

初值定理

k 域反转

终值定理

序列卷积性质

序列求和性质

■ 线性性质

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1 \quad f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z) \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < \min(\beta_1, \beta_2)$$

收敛域至少是两个序列 z 变换收敛域的相交部分。

例题1 求信号 $f(k) = 2^k \varepsilon(-k-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k)$ 的 z 变换 $F(z)$ 。

在某些特殊情况下，如零极点在线性运算后抵消，两个无限长序列作减法变成有限长序列，等等，收敛域反而可能会扩大。

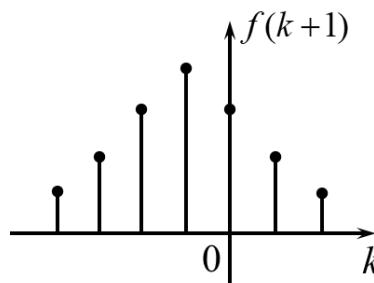
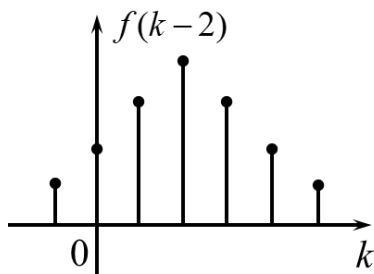
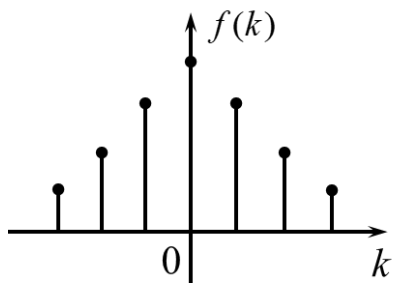
$$\text{如: } \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 \quad \delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} z^{-1} = 1 \quad |z| \geq 0$$

■ 移位性质

双边 z 变换的移位性质 移位后的序列不丢失原序列信息。

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta, \text{ 且有整数 } m > 0$$

则 $f(k \pm m) \leftrightarrow z^{\pm m} F(z)$, 收敛域至少为 $\alpha < |z| < \beta$



例题2 求信号 $f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k-4)$ 的 z 变换。

■ 移位性质

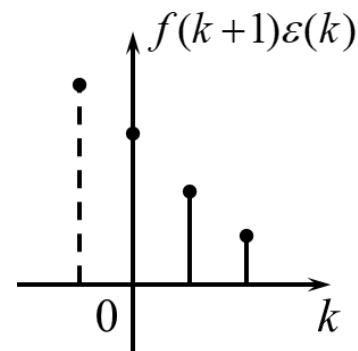
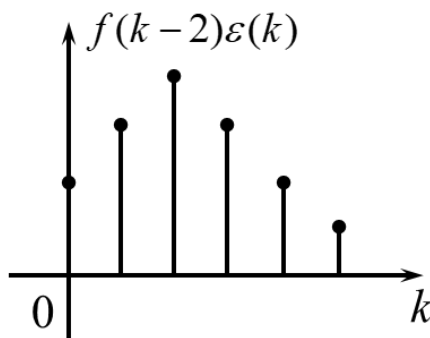
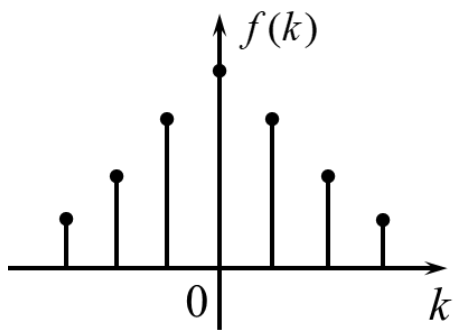
单边 z 变换的移位性质 移位后的序列与原序列相比长度发生了增减。

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), |z| > \alpha, \text{ 且有整数 } m > 0$$

$$\begin{cases} f(k-m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}, |z| > \alpha \\ f(k+m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right], |z| > \alpha \end{cases}$$

特殊地，对于**因果序列右移**，其单边 z 变换为：

$$f(k-m) = f(k-m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-m}F(z)$$



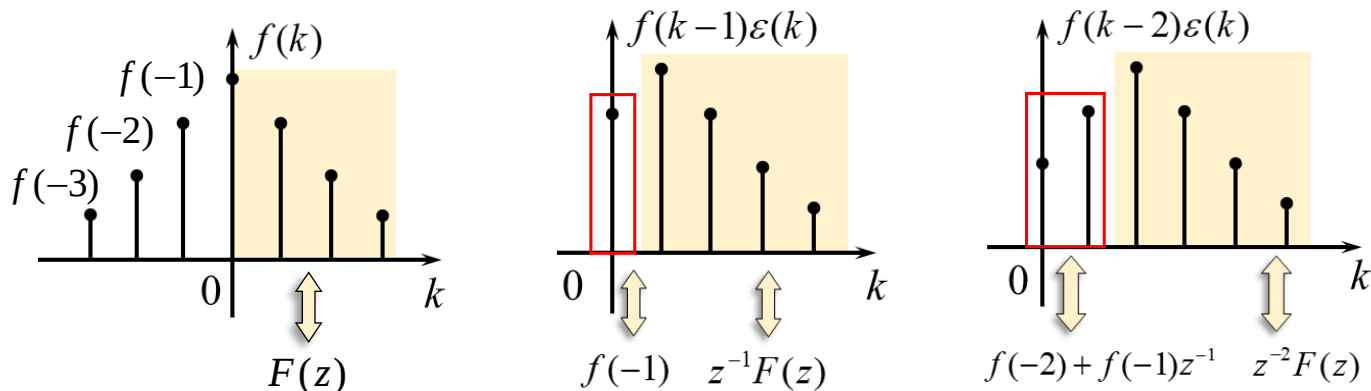
■ 移位性质

单边 z 变换的移位性质

需要记忆的是左移、右移1-2个单位的性质公式

右移性质：

$$\begin{cases} f(k-1)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-1}F(z) + \underline{f(-1)} \\ f(k-2)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-2}F(z) + \underline{f(-2) + f(-1)z^{-1}} \end{cases}$$



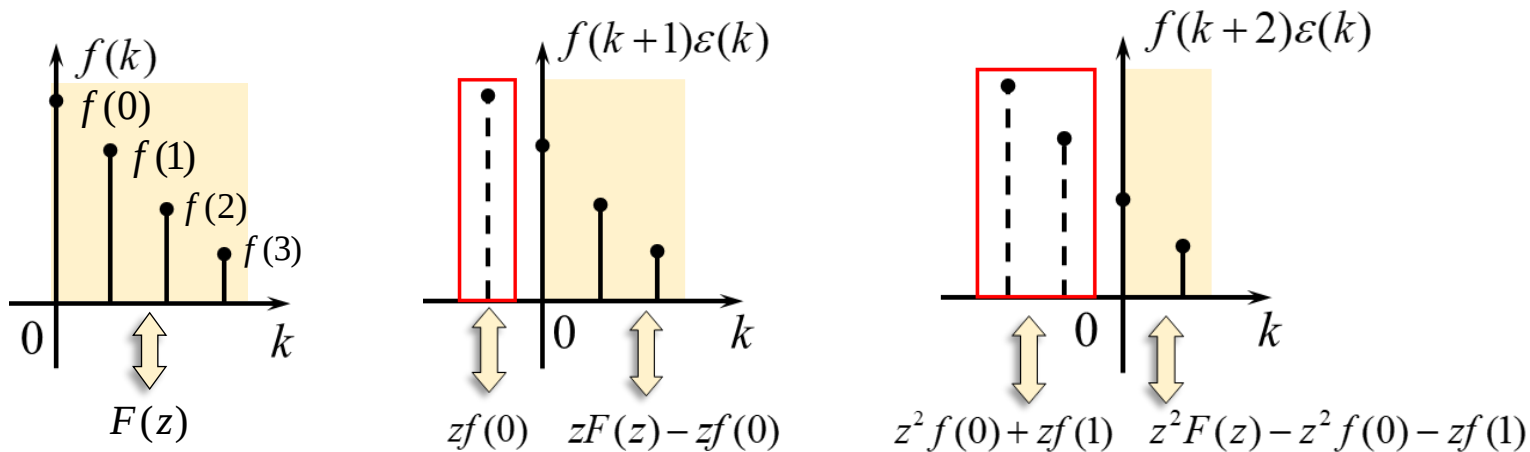
在差分方程中运用移位性质，会引入系统初始状态 $y(-1), y(-2), \dots$ ，便于在 z 域求解差分方程的解。

■ 移位性质

单边 z 变换的移位性质

需要记忆的是左移、右移1-2个单位的性质公式

左移性质:
$$\begin{cases} f(k+1)\varepsilon(k) \leftrightarrow zF(z) - \underline{zf(0)} = z[F(z) - f(0)] \\ f(k+2)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^2F(z) - \underline{z^2f(0) - zf(1)} = z^2[F(z) - f(0) - z^{-1}f(1)] \end{cases}$$



例题3 求信号 a^{k-2} 和 a^{k+2} 的单边 z 变换。

■ 移位性质

因果周期序列的 z 变换

设因果周期序列 $f_N(k)$ 第一个周期内的序列为 $f_0(k)$ ，序列周期为 N

$$f_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_0(k-mN) = f_0(k) + f_0(k-N) + f_0(k-2N) + \cdots$$

$$F(z) = F_0(z) + F_0(z)z^{-N} + F_0(z)z^{-2N} + \cdots = F_0(z) \cdot (1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots)$$

$$= \frac{F_0(z)}{1 - z^{-N}}, \quad |z^{-N}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

$$f_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_0(k-mN) \leftrightarrow \frac{F_0(z)}{1 - z^{-N}}, \quad |z| > 1$$

回顾连续单边周期信号：

$$f_T(t)\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t-nT) \leftrightarrow \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0$$

例题4 求如下周期为 N 的有始周期性单位序列的 z 变换。

$$\delta_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(k - mN)$$

■ 尺度变换性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta \quad \left\{ \begin{array}{l} b^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{b}\right), \quad \alpha|b| < |z| < \beta|b| \\ b^{-k} f(k) \leftrightarrow F(bz), \quad \frac{\alpha}{|b|} < |z| < \frac{\beta}{|b|} \\ (-1)^k f(k) \leftrightarrow F(-z), \quad \alpha < |z| < \beta \end{array} \right.$$

例题5 求 $f(k) = b^k \cos \beta k \varepsilon(k)$ 的 z 变换。

■ **k 域反转** 仅适用于双边 z 变换

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$f(-k) \leftrightarrow F(z^{-1}), \quad \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

例题6 求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的双边 z 变换。

■ 序列卷积性质

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1 \quad f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

$$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$$

收敛域：至少为 $F_1(z), F_2(z)$ 两个象函数收敛域的公共部分

$$\text{LTI系统: } y_{zs}(k) = e(k) * h(k) \leftrightarrow Y_{zs}(z) = E(z) \cdot H(z)$$

需注意：在象函数相乘的过程中，如果出现零极点抵消的情况，收敛域则可能会扩大。

例题7

求 $f(k) = a^k \varepsilon(k) * b^k \varepsilon(k)$ 的 z 变换（其中 $0 < a < b$ ）。

例题8

已知 $f_1(k) = \varepsilon(k)$ ， $f_2(k) = \delta(k+1) - \delta(k)$ ，试求 $f_1(k) * f_2(k)$ 的 z 变换。

■ z 域微分性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta \quad \begin{cases} kf(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z), & \alpha < |z| < \beta \\ k^2 f(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} F(z) \right), & \alpha < |z| < \beta \\ k^m f(k) \leftrightarrow \left(-z \frac{d}{dz} \right)^m F(z), & \alpha < |z| < \beta \end{cases}$$

其中 $\left(-z \frac{d}{dz} \right)^m$ 表示进行 m 次求导后乘以 $-z$ 的运算。

例题9 求 $f(k) = k\varepsilon(k)$ 的 z 变换。

$$k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

$$ka^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$ka^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

■ z 域积分性质

$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$ 设有整数 m , 且 $k+m > 0$, 则:

$$\frac{f(k)}{k+m} \leftrightarrow z^m \int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \quad \alpha < |z| < \beta$$

特殊地, 若 $m=0$, $k > 0$, 则: $\frac{f(k)}{k} \leftrightarrow \int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta \quad \alpha < |z| < \beta$

例题10 求 $f(k) = \frac{1}{k+1} \varepsilon(k)$ 的 z 变换。

■ 初值定理与终值定理

该性质适用于右边序列或有始序列，此时假设 $f(k)$ 为因果序列。

初值定理 由 $F(z)$ 直接求 $f(0), f(1), f(2), \dots$

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), |z| > |a| \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\ f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[F(z) - f(0)] \\ f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}] \\ \dots \end{array} \right.$$

例题11 某因果序列的 z 变换为 $F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-1)}$ ，求 $f(0), f(1)$ 。

■ 初值定理与终值定理

该性质适用于右边序列或有始序列，此时假设 $f(k)$ 为因果序列。

终值定理

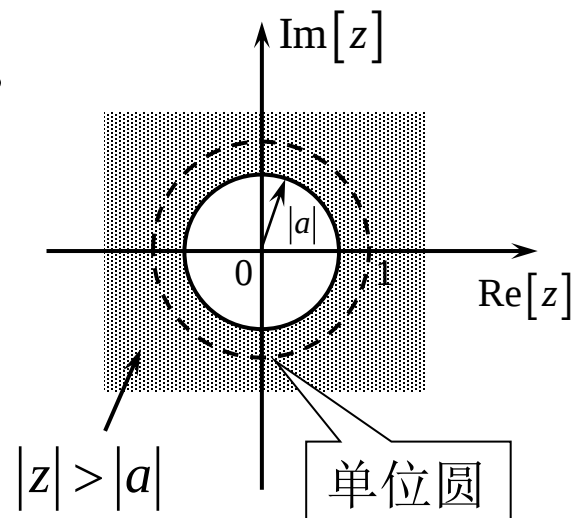
由 $F(z)$ 判断 $f(\infty)$ 是否存在，并求之。

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), \quad |z| > |a|, \quad 0 \leq |a| < 1$$

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

前提：收敛域包含单位圆时，终值才存在。

对于因果序列， $F(z)$ 除了在 $z=1$ 处可以有一阶极点外（此时该极点可约去），其余极点必须在单位圆 $|z|=1$ 内，才可以应用终值定理。



例题12

已知因果序列 $f(k)$ 的 z 变换如下，问能否应用终值定理？若能，试求序列终值 $f(\infty)$ 。

$$1) F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \quad 2) F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \quad 3) F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-\frac{1}{2})}$$

■ 序列求和性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$g(k) = \sum_{i=-\infty}^k f(i) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z), \quad \max(\alpha, 1) < |z| < \beta$$

例题13 求序列 $\sum_{i=0}^k 2^i$ ($k \geq 0$) 的 z 变换。

6.3 逆 z 变换

部分分式展开法

其它求解方法

■ 逆 z 变换

逆 z 变换的公式（了解）

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz \quad -\infty < k < +\infty$$

上式中 C 为收敛域中的一条环绕原点逆时针旋转的闭合曲线。

三大变换信号分解思想

基本信号

逆 z 变换计算方法

● $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow e^{j\omega t}$ 频域

● $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \Rightarrow e^{st}$ s 域

● $f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(z)}{z} z^k dz \Rightarrow z^k$ z 域

➤ 反演积分法（留数法）

➤ 幂级数展开法（解不闭合）

➤ 部分分式展开法

➤ 用 z 变换性质求逆 z 变换

■ 部分分式展开法

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{\underbrace{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}}_{n \text{ 个极点}}$$

逆 z 变换部分分式展开法与拉式变换完全一致，需要注意两点：

➤ 部分分式展开时，对 $\frac{F(z)}{z}$ 进行展开，然后再乘以 z 。

部分分式	常见变换对
$\frac{1}{z-a}$, $\frac{1}{(z-a)^2}$	$\frac{z}{z-a}$, $\frac{z}{(z-a)^2}$

➤ 求反变换对应的序列时，需要结合象函数收敛域进行分析。

■ 部分分式展开法

$m \leq n$ 时 直接对 $\frac{F(z)}{z}$ 进行展开，然后再乘以 z 。

$m > n$ 时 先通过多项式除法分解出真分式，再进行部分分式展开。

$F(z)$ 仅有单极点

部分分式形式:
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z - z_1} + \frac{k_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{k_n}{z - z_n}$$

系数公式: $k_i = (z - z_i) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=z_i}$
$$F(z) = k_0 + \frac{k_1 z}{z - z_1} + \frac{k_2 z}{z - z_2} + \cdots + \frac{k_n z}{z - z_n}$$

所用变换对:

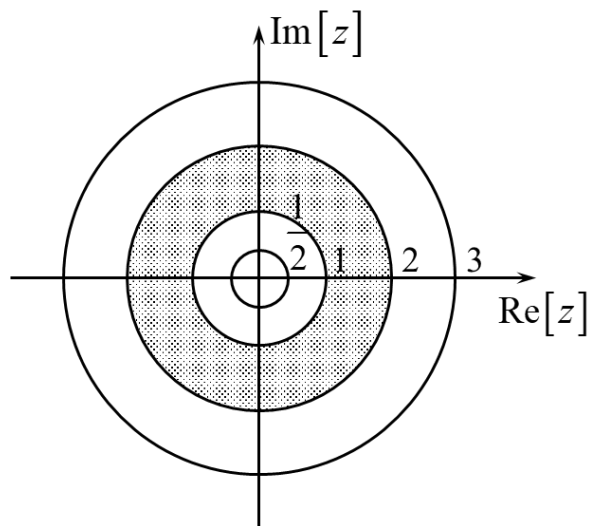
$$\delta(k) \leftrightarrow 1 \quad a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad b^k \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - b}, |z| < |b|$$

例题14 求象函数 $F(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $|z| > 3$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题15 求象函数 $F(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$ 的原函数 $f(k)$ 。

其中收敛域分别为：1) $|z| > \frac{1}{2}$, 2) $|z| < \frac{1}{3}$, 3) $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

例题16 求 $F(z) = \frac{-z}{z-1/2} + \frac{2z}{z-1} + \frac{-z}{z-2} + \frac{z}{z-3}$, $1 < |z| < 2$ 的原函数 $f(k)$ 。



■ 部分分式展开法

$F(z)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $z_{1,2} = c \pm jd = \alpha e^{\pm j\beta}$

共轭单极点对应的部分分式形式: $\frac{F(z)}{z} = \frac{k_1}{z - (c + jd)} + \frac{k_2}{z - (c - jd)}$

系数公式:

$$\begin{cases} k_1 = [z - (c + jd)] \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=c+jd} = |k_1| e^{j\varphi} \\ k_2 = [z - (c - jd)] \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=c-jd} = |k_1| e^{-j\varphi} = k_1^* \end{cases}$$

求出其中一个系数

另一系数取共轭即可

$$F(z) = \frac{|k_1| e^{j\varphi} z}{z - \alpha e^{j\beta}} + \frac{|k_1| e^{-j\varphi} z}{z - \alpha e^{-j\beta}} \begin{cases} |z| > \alpha & f(k) = 2|k_1| \alpha^k \cos(\beta k + \varphi) \varepsilon(k) \\ |z| < \alpha & f(k) = -2|k_1| \alpha^k \cos(\beta k + \varphi) \varepsilon(-k-1) \end{cases}$$

例题17 求象函数 $F(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 8}$ 在如下收敛域时的原函数 $f(k)$ 。

1) $|z| > 2\sqrt{2}$ 2) $|z| < 2\sqrt{2}$

■ 部分分式展开法

$F(z)$ 含有 r 重极点

$$F(z) = \frac{B(z)}{\underbrace{(z-a)^r}_{r \text{ 重极点 } z=z_1=a} A_2(z)} = \frac{B(z)}{(z-a)^r (z-z_{r+1}) \cdots (z-z_n)}$$

部分分式形式: $\frac{F(z)}{z} = \left[\frac{k_{11}}{(z-a)^r} + \frac{k_{12}}{(z-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(z-a)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \frac{k_j}{z-z_j}$

系数公式: $k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} (z-a)^r \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=a}$

所需变换对: $\left\{ \begin{array}{l} a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > |a| \\ ka^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, |z| > |a| \\ \frac{1}{2} k(k-1) a^{k-2} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^3}, |z| > |a| \\ \dots\dots \end{array} \right.$

推导记忆方法:
两侧**对 a 求导**
即可得到变换式

例题18 求象函数 $F(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^3}, |z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

■ 逆 z 变换的其它求法

当含有共轭极点时，可以尝试通过配凑和待定系数，配出对应的象函数，然后求解反变换。

所用到的变换对为：

$$\cos \omega_0 k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

$$\sin \omega_0 k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

此外，也要学会灵活应用性质和定义求解逆 z 变换。

例题19 求象函数 $F(z) = \frac{z}{z^2 - \sqrt{3}z + 1}$, $|z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题20 求象函数 $F(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, $|z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题21 求象函数 $F(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)(z - 0.5)}$, $|z| < \frac{1}{2}$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题22 求象函数 $F(z) = e^{\frac{2}{z}}, |z| > 0$ 的原函数 $f(k)$ 。

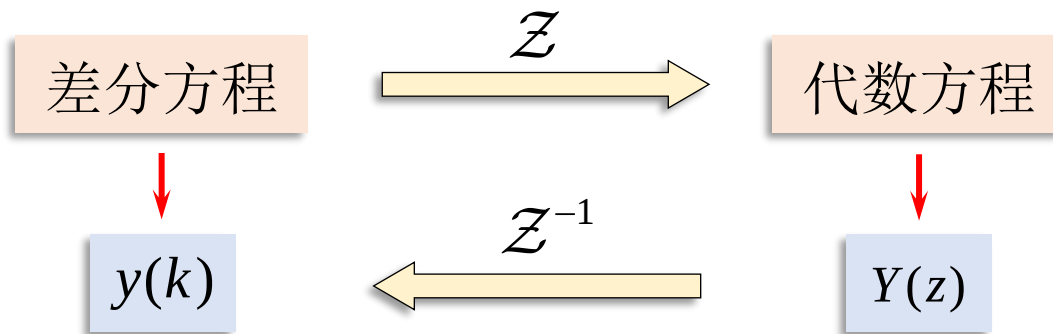
例题23 求象函数 $F(z) = \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right)$, $|z| > |a|$ 的原函数 $f(k)$ 。

6.4 离散时间系统的 z 域分析

系统差分方程的变换域解

系统函数与系统的 z 域框图

■ 系统差分方程的 z 域解



以二阶LTI离散系统为例，系统的差分方程为：

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

其中 $e(k)$ 在 $k = 0$ 时刻加入系统，即 $e(-1) = e(-2) = 0$ 。

对方程两端同时取单边 z 变换，根据时移性质，有：

$$Y(z) + a_1 [z^{-1}Y(z) + y(-1)] + a_0 [z^{-2}Y(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})E(z)$$

其中 $y(-1), y(-2)$ 为系统的初始状态。

■ 系统差分方程的 z 域解

$$Y(z) + a_1[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + a_0[z^{-2}Y(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2})E(z)$$

$$(1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2})Y(z) + [a_1y(-1) + a_0y(-2) + a_0y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2})E(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-[a_1y(-1) + a_0y(-2) + a_0y(-1)z^{-1}]}{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}}}_{e(k)=0 \Rightarrow Y_{zi}(z)} + \underbrace{\frac{b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}} E(z)}_{y(-1)=y(-2)=0 \Rightarrow Y_{zs}(z)}$$

与差分方程系数和
系统初始状态有关
与系统激励无关

与差分方程系数和
系统的激励有关
与初始状态无关

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) \quad \longleftrightarrow \quad y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

■ 系统差分方程的 z 域解

$$Y_{zi}(z) = \frac{-[a_1 y(-1) + a_0 y(-2) + a_0 y(-1)z^{-1}]}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad Y_{zs}(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} E(z)$$

系统时域解的形式由全响应 $Y(z)$ 的极点决定。而 $Y(z)$ 的极点由系统特征方程形成的极点，和系统激励信号的极点组成。

$$\text{系统特征方程: } z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow 1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2} = 0$$

{	自由响应/齐次解	由系统特征根决定
	强迫响应/特解	由激励的极点决定
{	零输入响应	由系统特征根决定
	零状态响应	由系统特征根和激励的极点共同决定

例题24

已知系统的差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k) + 2e(k-2)$ ，激励信号为 $e(k) = \varepsilon(k)$ ，系统的初始状态 $y(-1) = 2, y(-2) = -0.5$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ 、零状态响应 $y_{zs}(k)$ 和全响应 $y(k)$ 。

■ 系统差分方程的 z 域解

补充说明

➤ 若题目所给方程是前向差分方程，则求解方法有两种：

方法1： 利用单边 z 变换的左移性质

$$\begin{cases} y(k+1) \leftrightarrow zY(z) - zy(0) = z[Y(z) - y(0)] \\ y(k+2) \leftrightarrow z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) = z^2[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)] \end{cases}$$

此时需要利用 $y(0), y(1), \dots$

方法2： 将前向差分方程转换为后向差分方程，用右移性质求解

此时需要利用 $y(-1), y(-2), \dots$

➤ 若题目所给的条件不适用，则须通过差分方程的**迭代递推**得出所需的条件。

■ 系统函数与系统的 z 域框图

系统函数

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)}$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

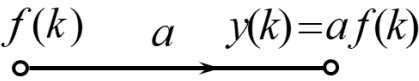
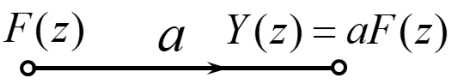
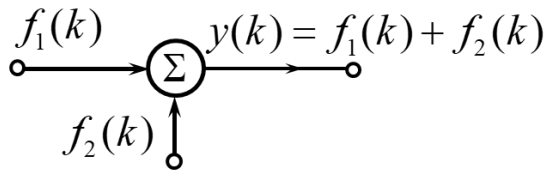
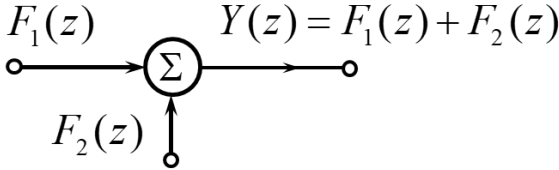
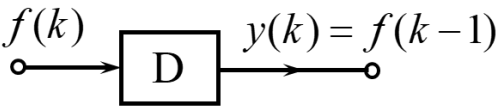
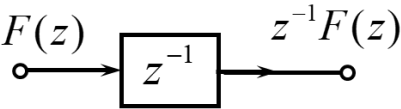
$$Y_{zs}(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} E(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

系统函数只与差分方程的系数和阶数有关。因此它只与系统的结构、参数有关，而与系统的激励、初始状态等均无关，反映的是系统固有特性。

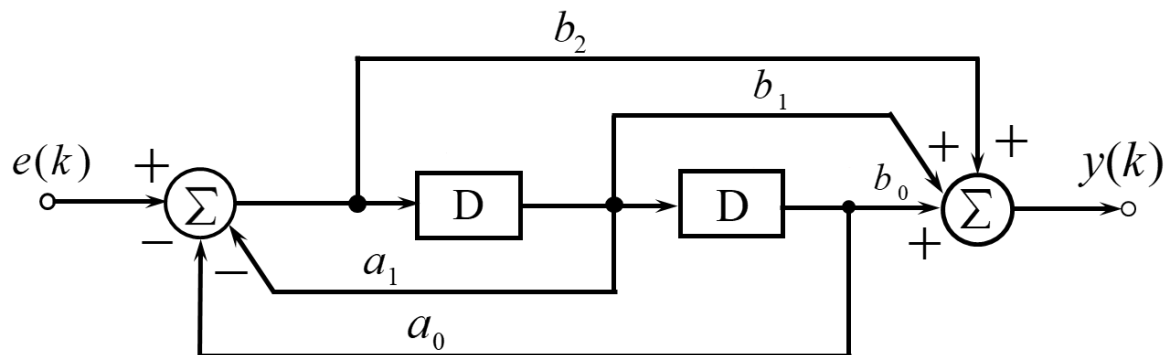
$$Y_{zs}(z) = E(z) \cdot H(z) \leftrightarrow y_{zs}(k) = e(k) * h(k) \quad h(k) \leftrightarrow H(z)$$

■ 系统函数与系统的 z 域框图

系统的 z 域框图

	时域框图	z 域框图
1) 数乘器		
2) 加法器		
3) 延时单元	 $f(k) \leftrightarrow F(z)$ $f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$	 系统函数与初始状态无关 因此用零状态的 z 域模型

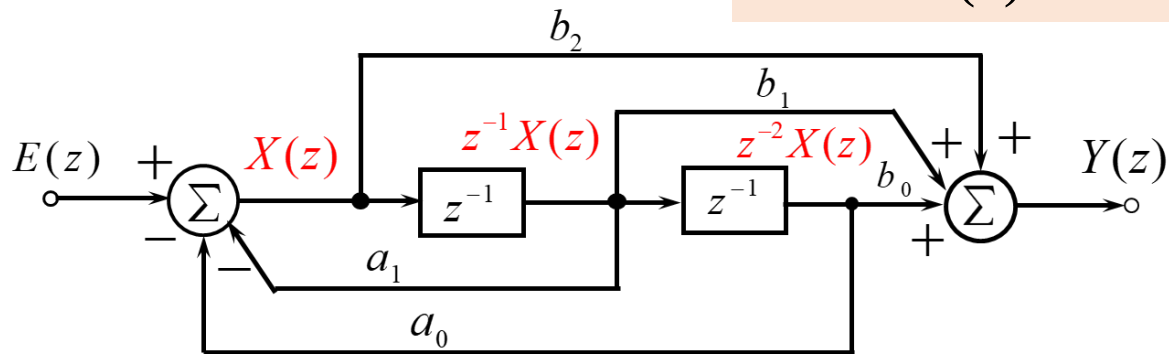
■ 系统函数与系统的 z 域框图



时域框图



$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$



z 域框图

$$E(z) - a_1 z^{-1} X(z) - a_0 z^{-2} X(z) = X(z) \quad b_2 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 z^{-2} X(z) = Y(z)$$

$$E(z) = (1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) \cdot X(z)$$

■ 系统函数，差分方程与系统 z 域框图的转换

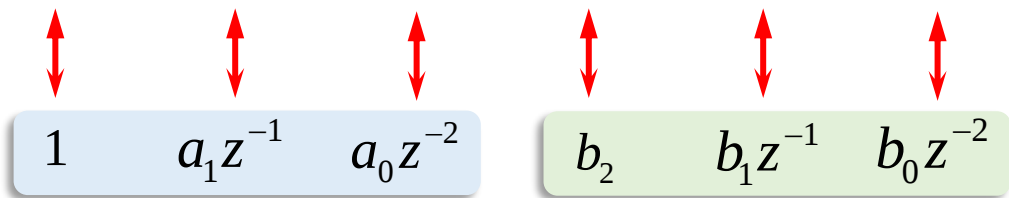
差分方程



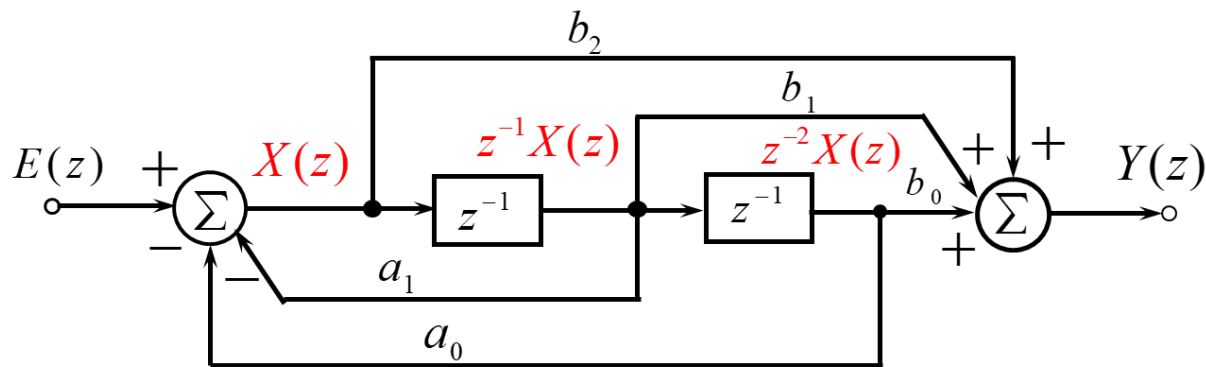
系统函数

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$



系统框图



延时单元 $\Leftrightarrow z^{-1}$

z 域框图

例题25

1) 已知某离散系统的差分方程为 $y(k) + 4y(k-1) + 3y(k-2) = e(k) - 3e(k-1)$, 试求系统函数 $H(z)$;

2) 已知离散时间系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z^2 + 6}{z^2 + 5z + 6}$, 试写出该系统的差分方程。

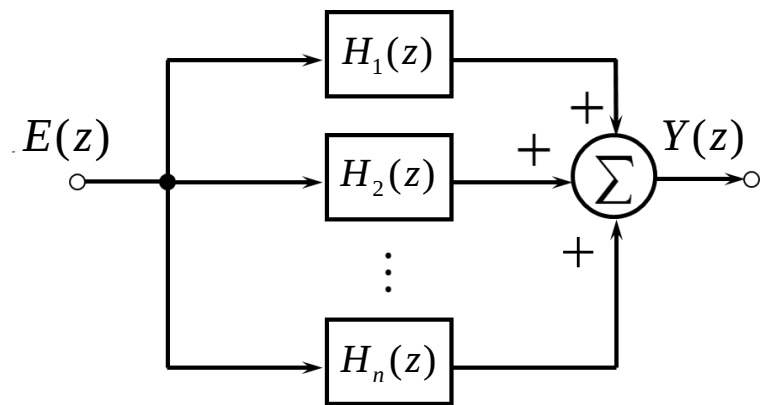
例题26

某离散系统当 $e(k) = \varepsilon(k)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(k) = [2 - 0.5^k + (-1.5)^k] \varepsilon(k)$

- 1) 求解系统的系统函数 $H(z)$ ；
- 2) 求解系统的差分方程。

■ 系统函数与系统的 z 域框图

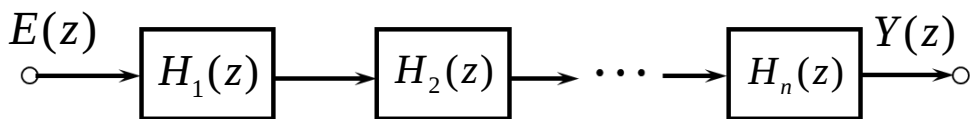
➤ 并联系统：系统函数为子系统函数之和。（时域为相加）



$$h(k) = h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k)$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z)$$

➤ 级联系统：系统函数为子系统函数之积。（时域为卷积和）

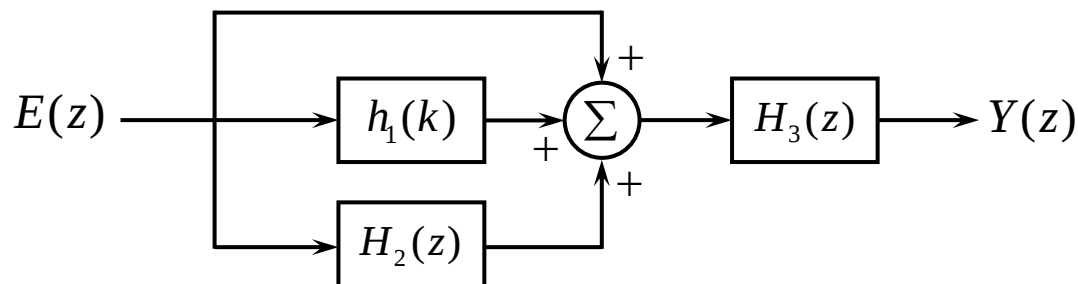


$$h(k) = h_1(k) * h_2(k) * \cdots * h_n(k)$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_n(z)$$

例题27

已知离散复合系统如下图所示，已知各子系统的单位序列响应或系统函数分别为 $h_1(k) = \varepsilon(k)$ ， $H_2(z) = \frac{z}{z+1}$ ， $H_3(z) = \frac{1}{z}$ ，求此复合系统的系统函数 $H(z)$ 。



6.5 系统函数与系统特性

系统函数的零点与极点

系统函数零、极点分布与系统的时域特性

系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的频率响应特性

■ 系统函数的零点与极点

系统函数的零点与极点

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$H(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = B \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

系统函数的零点： $z = z_j$

系统函数的极点： $z = p_i$

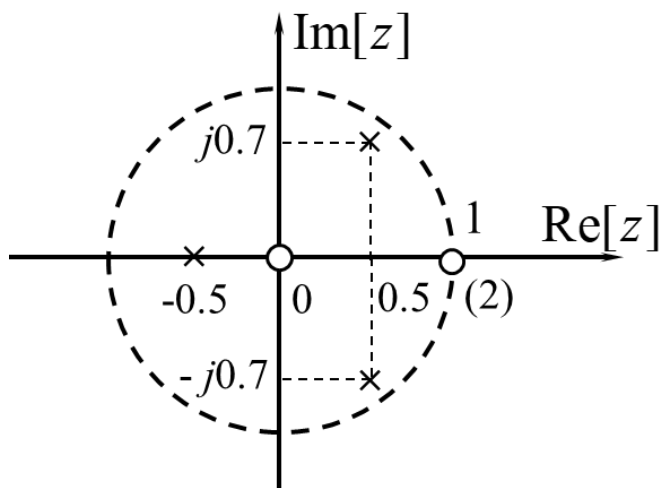
系统函数的零、极点分布图

把系统函数的零、极点画在 z 平面上的图形，称为系统函数的零、极点分布图。

一般用“○”表示零点，用“×”表示极点，高阶的零、极点需要在对应点处标明阶数。

■ 系统函数的零点与极点

$$H(z) = \frac{z(z-1)^2}{(z+0.5)[z-(0.5+j0.7)][z-(0.5-j0.7)]}$$



三个零点：

$$\underline{z_1 = 0}, \quad \underline{z_{2,3} = 1}$$

一阶零点 二阶零点

三个极点：

$$p_1 = -0.5, \quad p_2 = 0.5 + j0.7, \quad p_3 = 0.5 - j0.7$$

(均为一阶极点)

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆内

$$|z| = |a| < 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = a$	$\frac{Az}{z - a}$	$Aa^k \varepsilon(k)$	$ a < 1$ 指数 衰减 规律 $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow 0$ 响应幅度 收敛
共轭单极点 $p_{1,2} = ae^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta}z}{z - ae^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta}z}{z - ae^{-j\beta}}$	$2 A_1 a^k \cos(\beta k + \theta)\varepsilon(k)$	
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z - a)^2}$	$Aka^{k-1}\varepsilon(k)$	

极点位于**单位圆内**时，单位序列响应最终**收敛至0**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆上

$$|z| = |a| = 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = \pm 1$	$\frac{Az}{z \mp 1}$	$A(\pm 1)^k \varepsilon(k)$	$ a = 1$ 响应为 稳态分量 (阶跃、正弦等)
共轭单极点 $p_{1,2} = e^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta}z}{z - e^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta}z}{z - e^{-j\beta}}$	$2 A_1 \cos(\beta k + \theta)\varepsilon(k)$	
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z \mp 1)^2}$	$Ak(\pm 1)^k \varepsilon(k)$	$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow \infty$ 响应幅度 发散

极点位于**单位圆上**时，**一阶**极点的响应为**稳态分量**
二阶及以上极点，单位序列响应幅度发散，趋于**无界**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆外

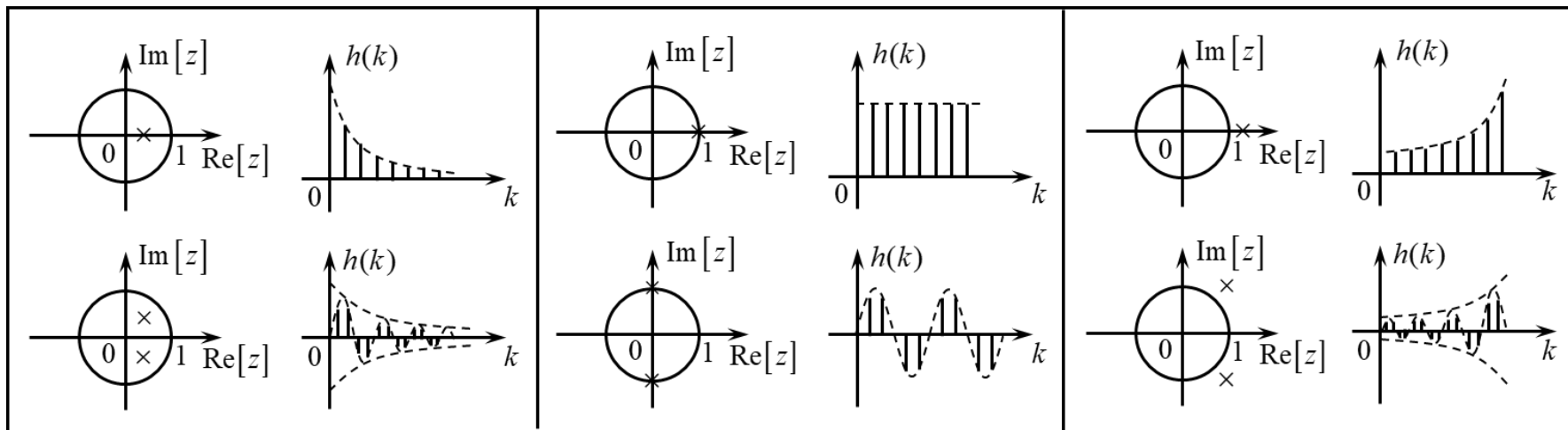
$$|z| = |a| > 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = a$	$\frac{Az}{z - a}$	$Aa^k \varepsilon(k)$	$ a > 1$
共轭单极点 $p_{1,2} = ae^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta}z}{z - ae^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta}z}{z - ae^{-j\beta}}$	$2 A_1 a^k \cos(\beta k + \theta)\varepsilon(k)$	指数 增长 规律 $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow \infty$
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z - a)^2}$	$Aka^{k-1}\varepsilon(k)$	响应幅度 发散

极点位于**单位圆外**时，单位序列响应幅度**发散**，趋于**无界**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

系统函数零、极点与时域特性的关系总结 ☆



- 单位圆内的极点所对应的响应，当 $k \rightarrow \infty$ 时，幅度衰减到0；
- 单位圆上的一阶极点对应的系统响应为稳态分量；
- 单位圆上的二阶以上的极点以及单位圆外的极点所对应的响应，幅度随着 $k \rightarrow \infty$ 而趋于无穷大；
- 系统函数的零点只影响响应的幅度与相位。

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

因果系统的判断方法

● 时域判断

系统的单位序列响应 $h(k)$ 为因果信号，即 $h(k) = 0, k < 0$ 。

● z 域判断

系统函数 $H(z)$ 的收敛域为 $|z| > \rho_0$ ，即系统函数的收敛域在极点所在最大半径圆的外部。

稳定系统的判断方法

● 时域判断 系统的单位序列响应 $h(k)$ 绝对可和，即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \leq M$ 。

● z 域判断 系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须包含单位圆 $|z| = 1$ 。

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

因果稳定系统的判断方法

● 时域判断

系统的单位序列响应 $h(k)$ 因果，且绝对可和，即 $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| \leq M$ 。

● z 域判断

因果稳定系统

系统函数的极点全部在单位圆 $|z|=1$ 内。

因果临界稳定系统

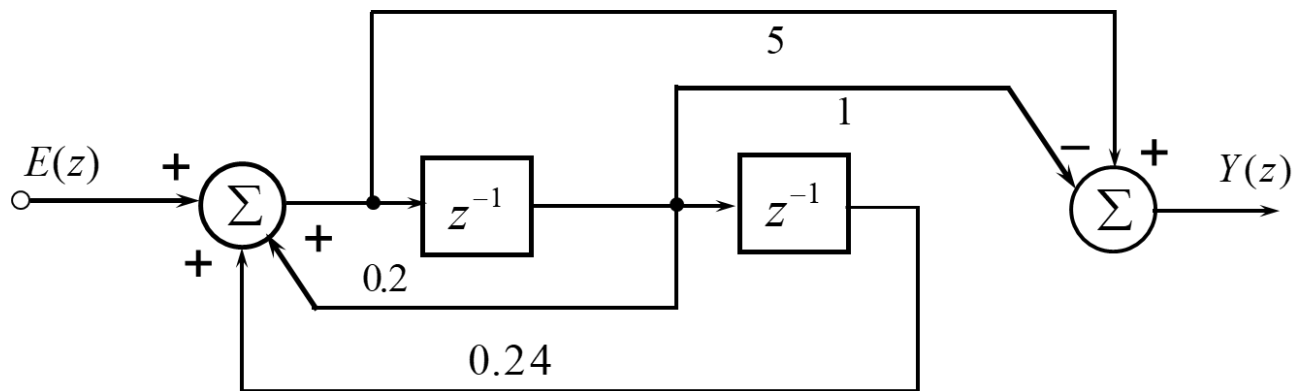
系统函数在单位圆上仅有一阶极点，其余极点全部在单位圆内。

因果不稳定系统

系统函数在单位圆上含有二阶及以上极点，或在单位圆外含有极点。

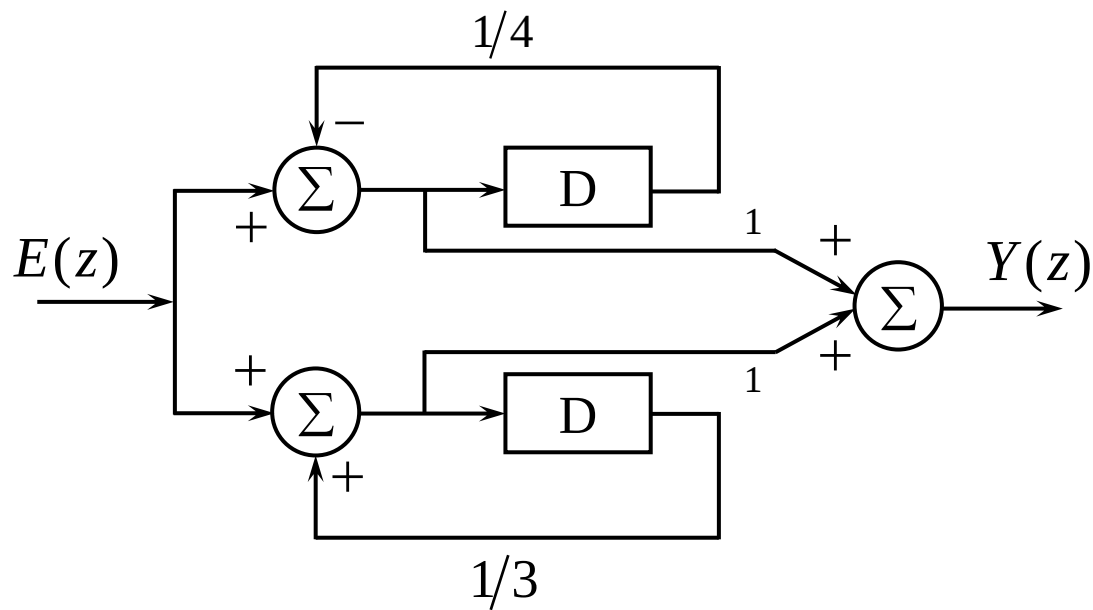
例题28

图示因果系统：1) 判断系统是否稳定；2) 求单位序列响应 $h(k)$ 。



例题29

图示因果系统：1) 判断系统是否稳定；2) 求单位序列响应 $h(k)$ 。

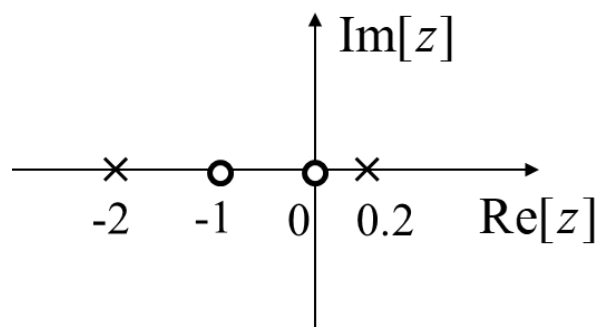


例题30

给定离散线性时不变系统 $y(k-1) - \frac{10}{3}y(k) + y(k+1) = e(k)$ ，已知系统是稳定的，试求其单位序列响应。

例题31

某线性时不变离散系统系统函数的零极点分布如图所示，试指出 $H(z)$ 可能的收敛域，并对每一种收敛域确定系统的因果性与稳定性。



■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

系统稳定，即系统函数的极点均在单位圆内（ $A(z)=0$ 的根全在单位圆内）的条件为：分母多项式 $A(z)$ 满足：

1) $A(1) > 0$ $(-1)^n A(-1) > 0$

2) 朱里表奇数行第一个元素大于最后一个元素的绝对值，即：

$$a_n > |a_0|, \quad c_{n-1} > |c_0|, \quad d_{n-2} > |d_0|, \quad \cdots, \quad r_2 > |r_0|$$

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

朱里表

1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0	} 由多项式 $A(z)$ 的系数构成
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	
3	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	} 第 3 行之后的 奇数行需要计算	
4	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}		
5	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	$\cdots$	d_0			
6	d_0	d_1	d_2	$\cdots$	d_{n-2}			
...	...	...	...	...				
$2n-3$	r_2	r_1	r_0				最后一行有3个元素	

第 3 行以后奇数行的计算规则：

$$c_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad c_0 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_0 \\ c_0 & c_{n-1} \end{vmatrix} \quad d_{n-3} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_1 \\ c_0 & c_{n-2} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad d_0 = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}$$

例题32 已知系统函数分母多项式如下，判别系统的稳定性。

1) $A(z) = 2z^4 - 4z^3 + 2z - 3$

2) $A(z) = 2z^4 + 2z^3 - 4z - 1$

3) $A(z) = 4z^4 - 4z^3 + 2z - 1$

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

二阶情形 $A(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

系统稳定，即系统函数的极点均在单位圆内（ $A(z)=0$ 的根全在单位圆内）的条件为：分母多项式 $A(z)$ 满足：

$$A(1) > 0, A(-1) > 0, a_2 > |a_0|$$

例题33

某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.5z + (K + 1)}$ ，求使得系统稳定的 K 值的取值范围。

■ 离散系统的频率响应特性

系统对正弦序列的响应

➤ 激励为虚指数序列

$$e(k) = e^{j\omega k} \longrightarrow y_1(k) = h(k) * e^{j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

设因果系统稳定，此时收敛域包含单位圆，令 $z = e^{j\omega}$ ，则：

$$y_1(k) = e^{j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)(e^{j\omega})^{-n} \right] = e^{j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \right]_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega k} H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega k} H(e^{j\omega})$$

$$y(k) = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega k} = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{附加幅度}} \underbrace{e^{j[\omega k + \varphi(\omega)]}}_{\text{附加相位}}$$

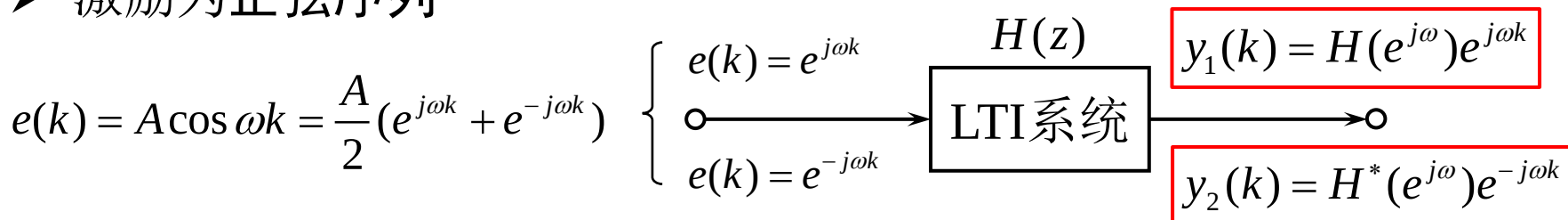
虚指数序列的稳态响应

$$e(k) = e^{-j\omega k} \longrightarrow y_2(k) = h(k) * e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega(k-n)} = e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega n}$$

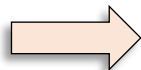
$$y_2(k) = e^{-j\omega k} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega n} \right]^* = e^{-j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \right]_{z=e^{j\omega}}^* = e^{-j\omega k} H^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega k} H^*(e^{j\omega})$$

■ 离散系统的频率响应特性

➤ 激励为正弦序列

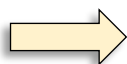


$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \\ H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{A}{2} \left[e^{j\omega k} |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} + e^{-j\omega k} |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)} \right] \\ &= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega})| \left[e^{j[\omega k + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega k + \varphi(\omega)]} \right] \\ &= A |H(e^{j\omega})| \cos[\omega k + \varphi(\omega)] \end{aligned}$$

$$e(k) = A \cos(\omega k + \theta)$$



$$y(k) = \underbrace{A |H(e^{j\omega})|}_{\text{附加幅度}} \cos[\omega k + \theta + \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{附加相位}}]$$

正弦稳态响应

激励信号为虚指数/正弦序列时，系统稳态响应仍为相同数字角频率的虚指数/正弦序列，其幅度和相位由 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\varphi(\omega)$ 确定，并附加在原序列上。

■ 离散系统的频率响应特性

离散系统的频率响应函数

因果稳定系统，收敛域包含单位圆，则频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

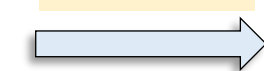
单位圆 $z = e^{j\omega}$ 上的系统函数 $H(z)$ 就是频率响应。

注意事项 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 里的 ω 与连续信号 $H(j\omega)$ 的 ω 不同

$H(e^{j\omega}) \sim \omega$: 数字角频率
 $H(j\omega) \sim \omega$: 模拟角频率

模拟角频率 Ω

$$\omega = \Omega T$$



数字角频率 ω

采样周期 T

频响函数的其它写法

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\theta})$$

■ 离散系统的频率响应特性

频率响应函数的性质

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

物理意义：反映系统对不同数字频率 ω 的正弦序列的稳态响应特性。

➤ 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 是**周期函数**，周期为 2π 。

单位圆 $z = e^{j\omega}$ 的周期为 2π ，故频响函数值也具有 2π 的周期。

➤ 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 是数字角频率 ω 的**连续函数**。

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \begin{cases} |H(e^{j\omega})| \sim \omega \text{ 的偶函数} & \text{幅频响应特性} \\ \varphi(\omega) \sim \omega \text{ 的奇函数} & \text{相频响应特性} \end{cases}$$

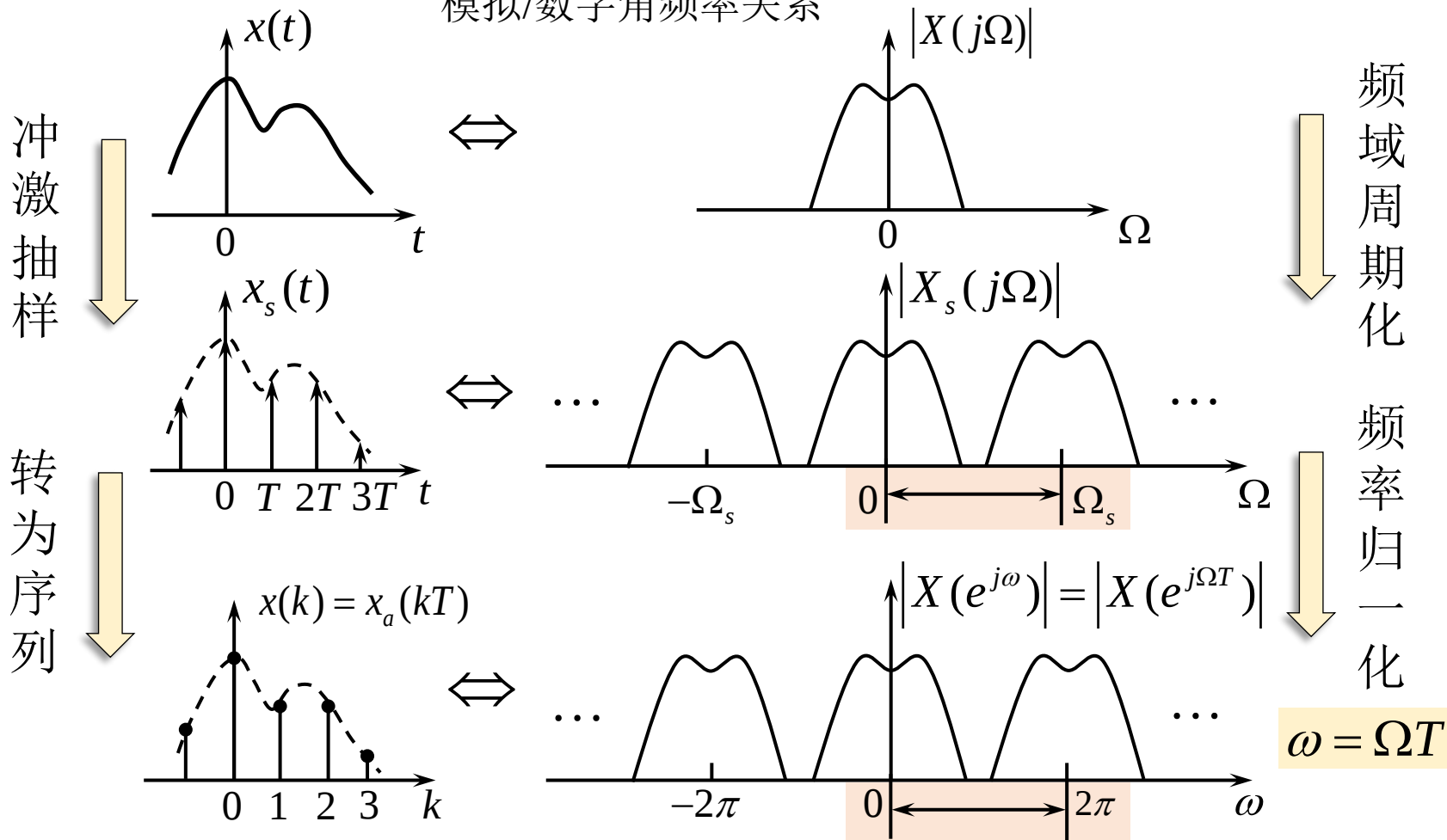
离散系统的频率响应特性

● 频谱的周期性分析

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_s}$$

Ω	0	$\Omega_s/2$	Ω_s
ω	0	π	2π

模拟/数字角频率关系

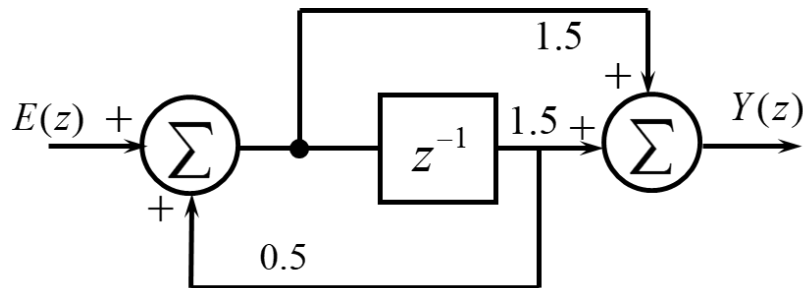


例题34

某离散系统的 z 域模型如图所示。

1) 求系统的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$;

2) 已知输入序列 $e(k) = 2 + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}k + 30^\circ\right)$, 求系统的稳态响应 $y_{ss}(k)$ 。



■ 离散系统的频率响应特性

系统零、极点与频响函数的关系

$$H(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = B \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = B \frac{\prod_{j=1}^m (e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega} - p_i)} \quad \begin{cases} \text{零矢量: } e^{j\omega} - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } e^{j\omega} - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$

幅频响应特性

$$|H(e^{j\omega})| = B \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = B \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

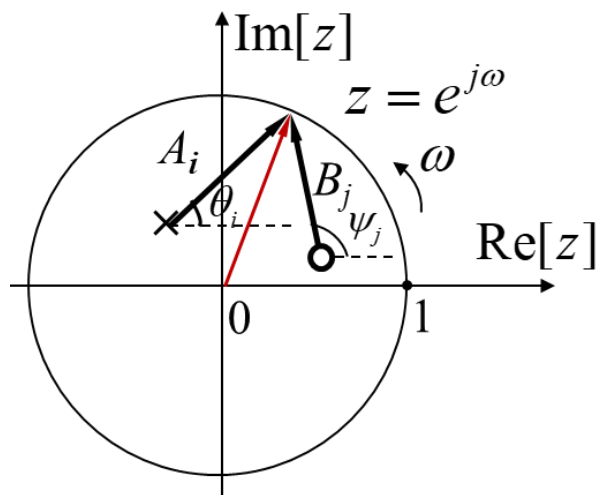
相频响应特性

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

■ 离散系统的频率响应特性

频率特性的几何分析

$$H(e^{j\omega}) = B \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}} \quad \begin{cases} \text{零矢量: } e^{j\omega} - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } e^{j\omega} - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$



幅频响应特性

$$|H(e^{j\omega})| = B \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} = B \frac{\text{零矢量模值之积}}{\text{极矢量模值之积}}$$

相频响应特性

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= \text{零矢量相角之和} - \text{极矢量相角之和} \end{aligned}$$

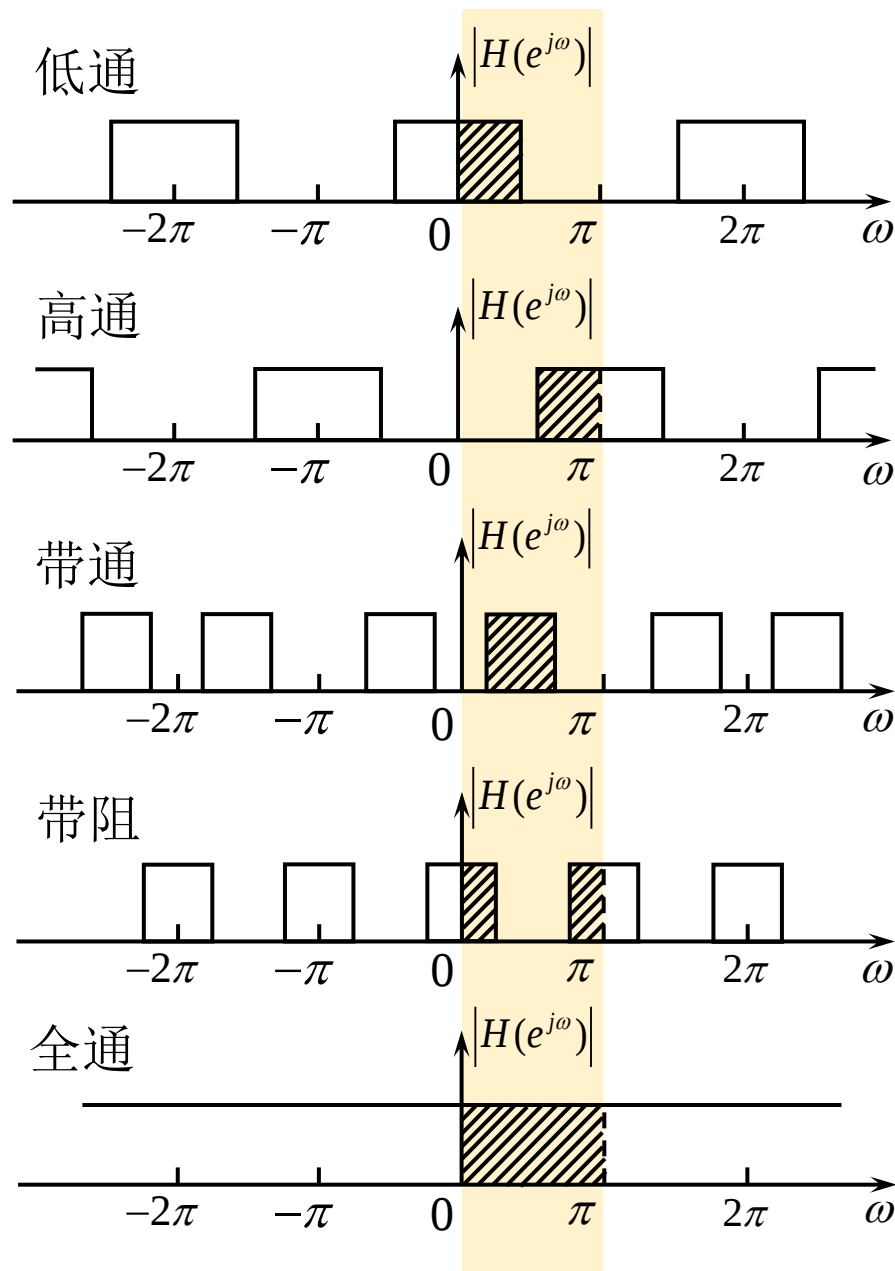
复变量 z 沿单位圆逆时针旋转，各矢量的模和相位随 ω 变化，根据变化的情况，可画出幅频和相频特性曲线。沿单位圆旋转具有 2π 的周期，因此作出一个周期内的曲线即可。

■ 离散系统的频率响应特性

数字滤波器的分类

理想数字滤波器的频率特性如图所示，这些频率特性都是以 2π 周期的连续函数。

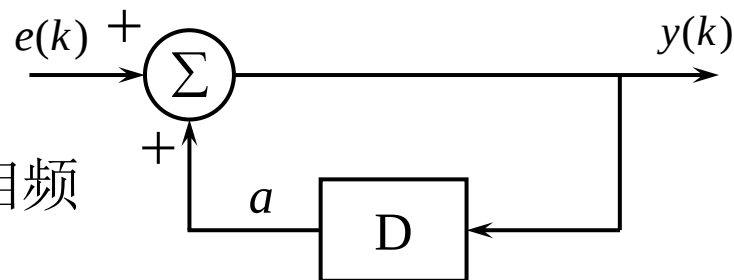
根据对称性，分析数字滤波器频率特性时，只要给出数字角频率 $\omega = \Omega T$ 在区间 $0 \sim \pi$ 内的变化情况即可。其中 0 代表低频， π 代表高频，根据频响函数寻求满足或者逼近性能要求的系统函数。



例题35

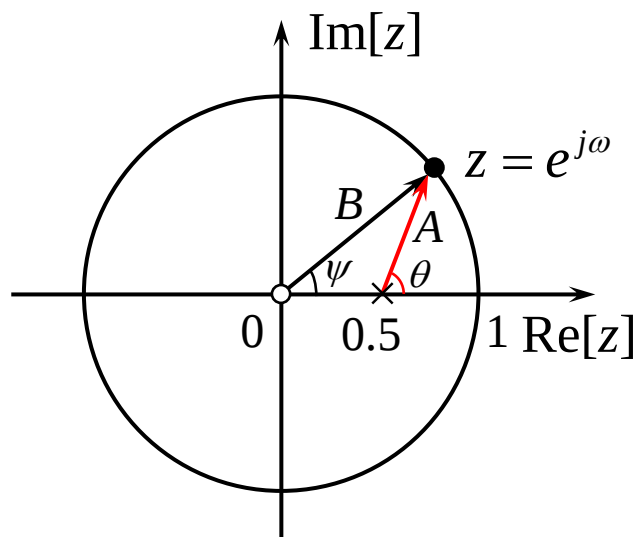
求图示一阶离散系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$

粗略作出 $a = 0.5$ 和 -0.5 时的幅频特性与相频特性曲线。



例题35

$$a = 0.5 \quad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.5} = \frac{Be^{j\psi}}{Ae^{j\theta}}$$



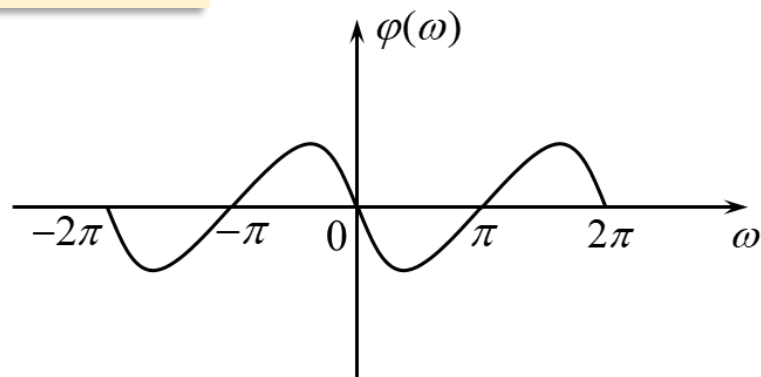
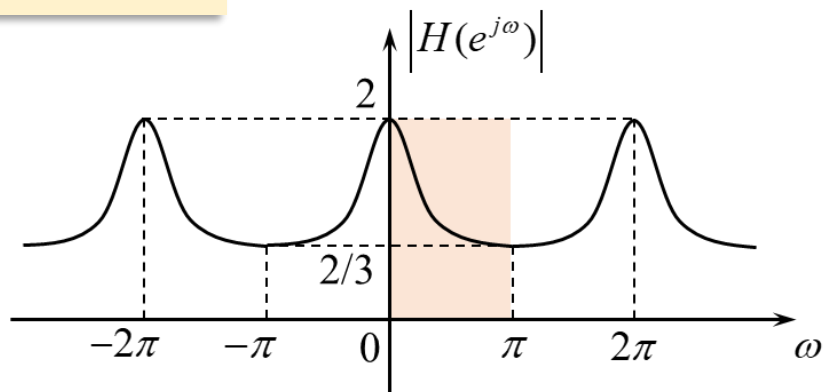
$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A} \\ \varphi(\omega) = \psi - \theta \end{cases}$$

ω	$ H(e^{j\omega}) $	$\varphi(\omega)$
0	2	0
$0 \rightarrow \pi$	$\searrow$	< 0
π	$2/3$	0
$\pi \rightarrow 2\pi$	$\nearrow$	> 0
2π	2	0

幅频特性

低通特性

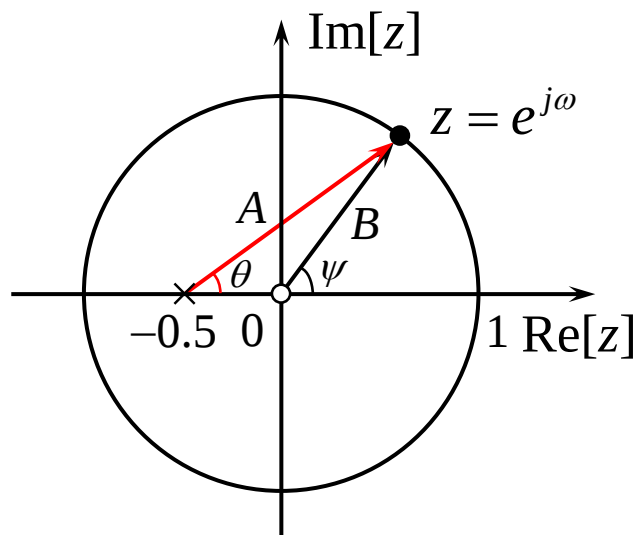
相频特性



$\omega = 0$ 时, $z = e^{j\omega}$ 离极点最近, 幅频达到峰值

例题35

$$a = -0.5 \quad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} + 0.5} = \frac{Be^{j\psi}}{Ae^{j\theta}}$$



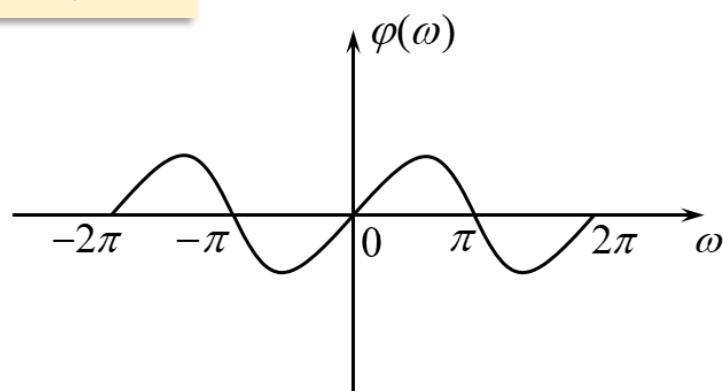
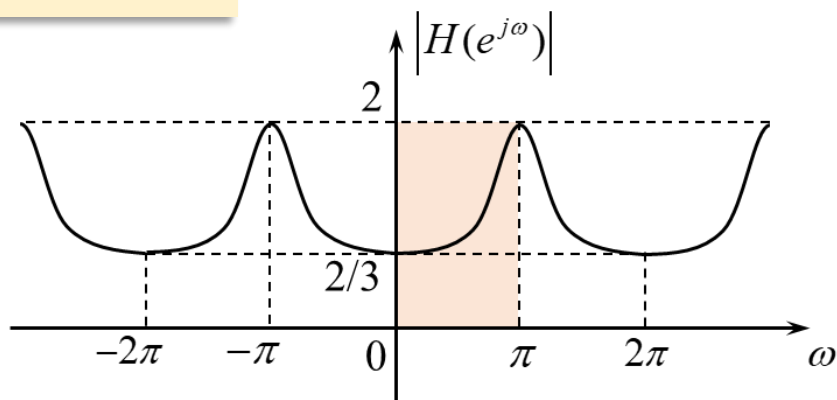
$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A} \\ \varphi(\omega) = \psi - \theta \end{cases}$$

ω	$ H(e^{j\omega}) $	$\varphi(\omega)$
0	2/3	0
$0 \rightarrow \pi$	$\nearrow$	> 0
π	2	0
$\pi \rightarrow 2\pi$	$\searrow$	< 0
2π	2/3	0

幅频特性

高通特性

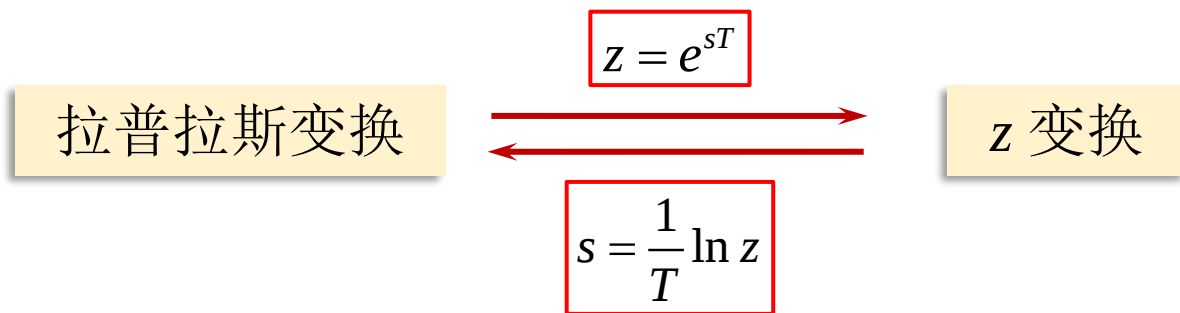
相频特性



$\omega = \pi$ 时, $z = e^{j\omega}$ 离极点最近, 幅频达到峰值

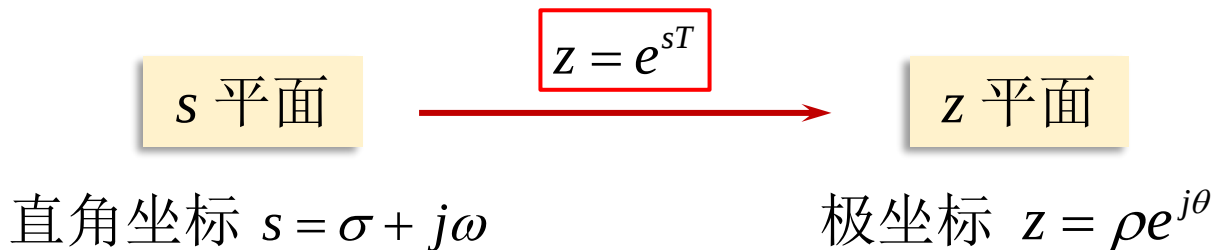
6.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系



其中 T 为采样周期, $f_s = \frac{1}{T}$ 为采样频率, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为采样角频率

$s - z$ 平面的映射关系



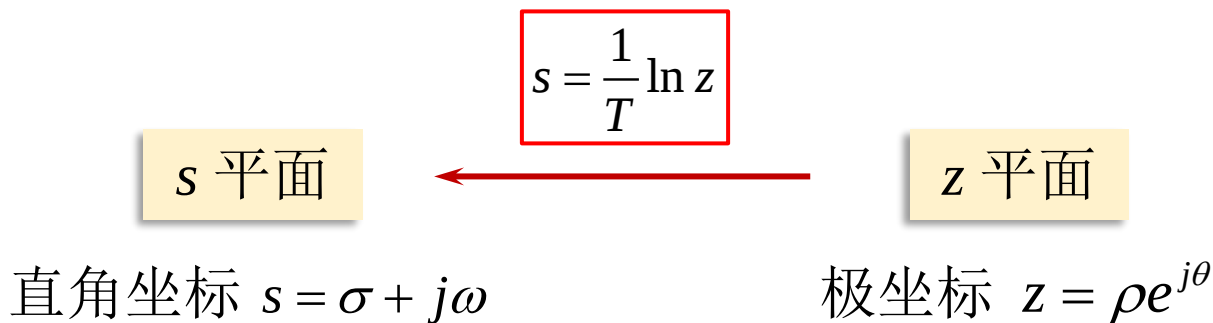
$$\rho e^{j\theta} = e^{\sigma T + j\omega T} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

极坐标极径 旋转角, 即数字角频率

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$s - z$ 平面的映射关系

$e^{j\theta}$ 是以 2π 为周期的周期函数，因此在 s 平面上沿虚轴移动对应于 z 平面上沿单位圆周期旋转。 ω 在 s 平面上每平移 ω_s 对应于 z 平面上 θ 变化 2π （相当于沿着单位圆旋转一圈），故 $s - z$ 映射不是单值映射。



在 z 平面上的一点映射到 s 平面是无穷多点，表达式为：

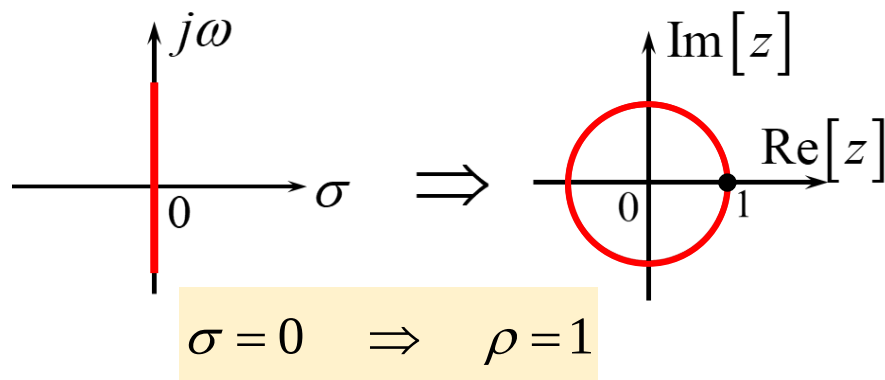
$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{1}{T} \ln \rho + j \frac{\theta + 2m\pi}{T}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

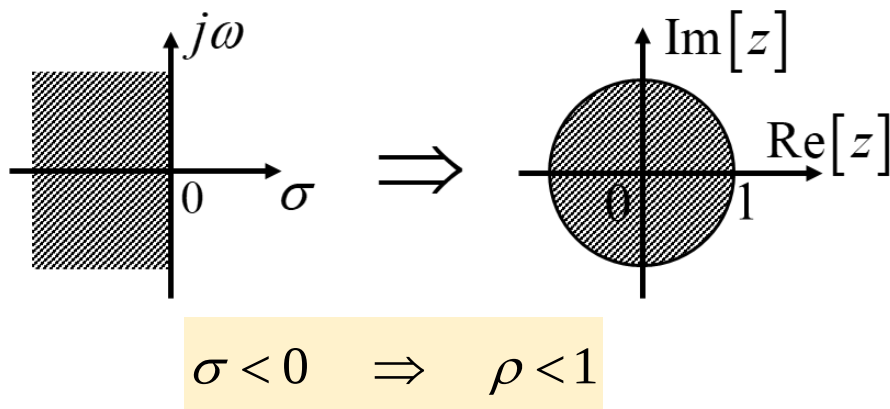
$s - z$ 平面映射关系总结

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s 平面 **虚轴** $\rightarrow$ z 平面 **单位圆**



s 平面 **左半平面** $\rightarrow$ z 平面单位圆 **内部**

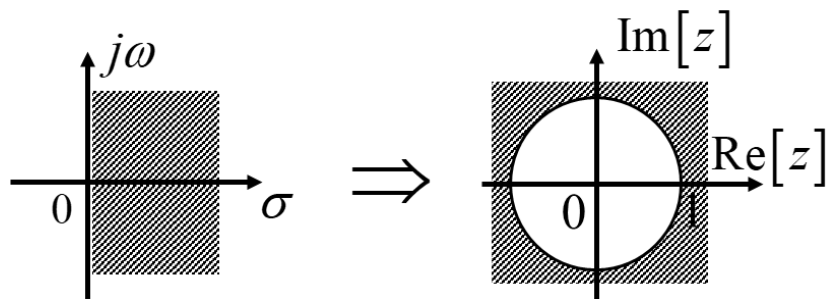


■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$s - z$ 平面映射关系总结

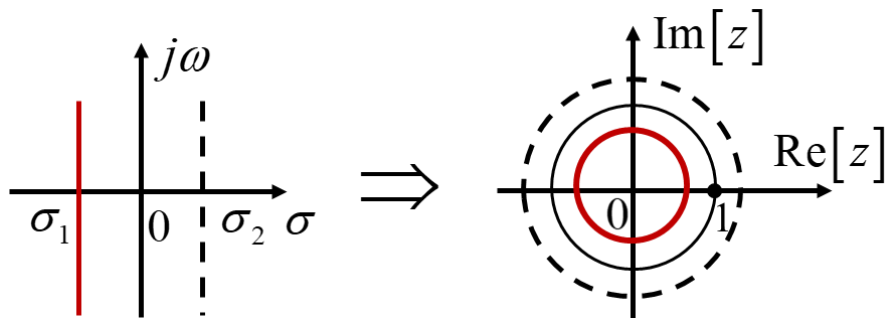
$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s 平面**右**半平面 $\rightarrow z$ 平面单位圆**外部**



$$\sigma > 0 \Rightarrow \rho > 1$$

s 平面**平行于虚轴的直线** $\rightarrow z$ 平面的**某个圆环**



$$\operatorname{Re}[s] = \sigma_1 < 0 \Rightarrow |z| = \rho_1 < 1$$

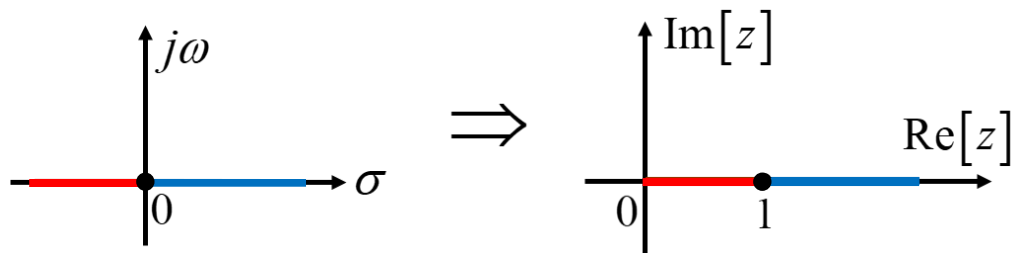
$$\operatorname{Re}[s] = \sigma_2 > 0 \Rightarrow |z| = \rho_2 > 1$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s - z 平面映射关系总结

s 平面 **实轴** → z 平面 **正实轴**

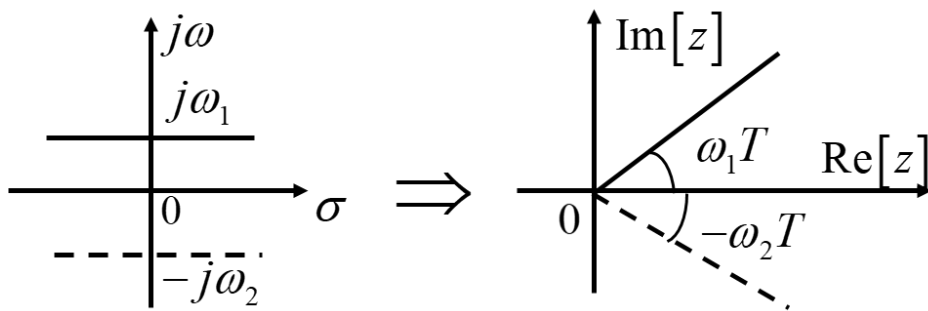


$$\omega = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\sigma < 0 \text{ 时} \Rightarrow \rho \in (0, 1)$$

$$\sigma > 0 \text{ 时} \Rightarrow \rho \in (1, +\infty)$$

s 平面 **平行于实轴的直线** → z 平面从原点出发极角为 $\theta = \omega_0 T$ 的 **射线**



$$-\infty < \sigma < +\infty \Rightarrow \rho > 0$$

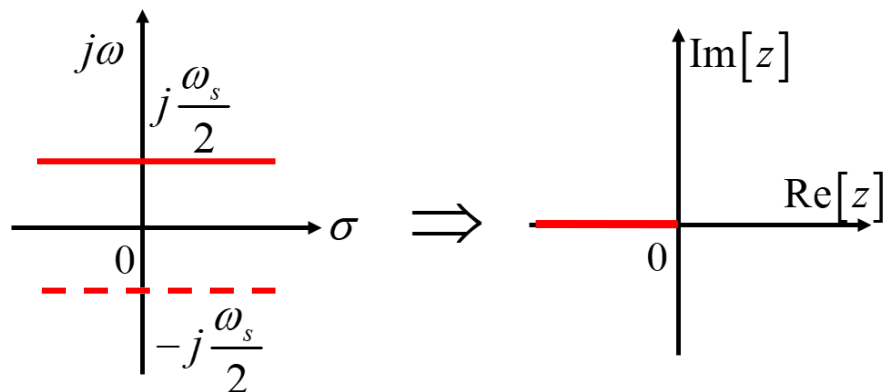
$$\text{Im}[s] = \omega = \omega_0 \Rightarrow \theta = \omega_0 T = 2\pi \frac{\omega_0}{\omega_s}$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

s - z 平面映射关系总结

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

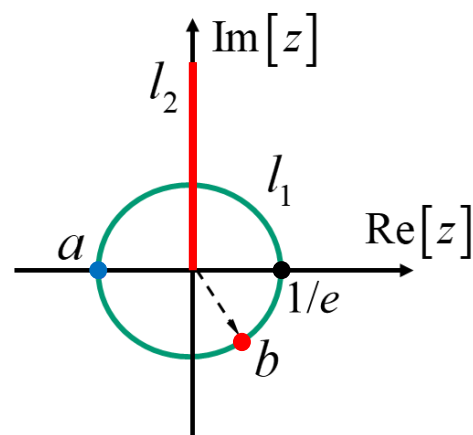
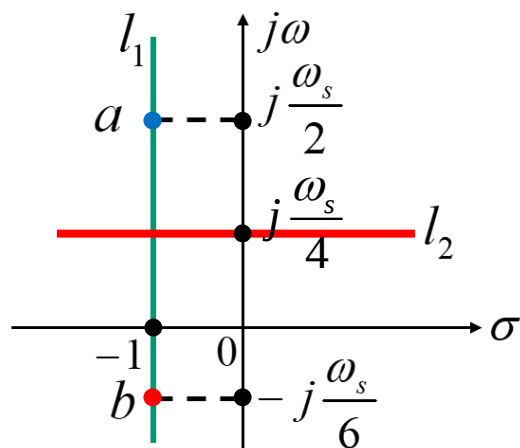
s 平面过 $\pm j \frac{k\omega_s}{2}$ 且平行于实轴的直线 $k=1,3,5,\dots \rightarrow z$ 平面的**负实轴**



$$\text{Im}[s] = \omega = \pm \frac{k\omega_s}{2} (k=1,3,5) \Rightarrow \theta = \pm \frac{k\omega_s}{2} T = \pm \frac{k\omega_s}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = \pm k\pi$$

例题36

画出 s 平面上的直线 l_1, l_2 以及 a, b 点在 z 平面的映像（已知采样间隔 $T = 1$ ）。



例题37

- 1) 求 z 平面上的点 $z_0 = 2 + j2$ ，在 s 平面上的映像点 s_0 的坐标（设采样间隔 $T = 1$ ）；
- 2) s 平面的点 $A(-0.5, 0.5)$ 映射为 z 平面的点 B ， O 为 z 平面原点，求线段 OB 的长度（设取样周期 $T = 2$ ）。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger